สมบัติบางประการของการคูณเมทริกซ์

Some Properties of Matrix Multiplication

อำภาพร คณะแพง[1] และ นิรุต มีเกิด[1*]

Amphaphon Khanaphaeng[1] and Niroot Meekoed[1*]

ABSTRACT

In this research, we study some properties of matrix multiplication and semi-magic squares.

Keywords : Matrix multiplication, Semi-magic squares

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เราศึกษาสมบัติบางประการของการคูณเมทริกซ์และกึ่งจัตุรัสกล

คำสำคัญ : การคูณเมทริกซ์ กึ่งจัตุรัสกล

คำนำ

เมทริกซ์เป็นเรื่องหนึ่งของพีชคณิตเชิงเส้น ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้มากมาย เช่น การแก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร การวิเคราะห์เชิงพีชคณิตและเรขาคณิต ใช้ในสาขาฟิสิกส์ เคมี วิศวกรรม สถิติ ทฤษฎีกราฟ ทฤษฎีความน่าจะเป็น เศรษฐศาสตร์ สังคมศาสตร์ และคอมพิวเตอร์ เป็นต้น (Leon, 2006)

ในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลรวมของสมาชิกของเมทริกซ์กับการคูณเมทริกซ์ ซึ่งผลที่ได้สามารถนำไปใช้ในการพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างผลรวมของสมาชิกของเมทริกซ์กับดีเทอร์มิแนนต์และสมบัติบางประการของกึ่งจัตุรัสกล

วิธีดำเนินการวิจัย

ก่อนที่จะกล่าวถึงสมบัติบางประการของการคูณเมทริกซ์ ผู้เขียนขอกล่าวถึงบทนิยามของการคูณเมทริกซ์และจัตุรัสกลก่อน ดังนี้

บทนิยาม 1 ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ แล้ว $AB = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$

เมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$ และ $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$

นั่นคือ

---

[1] โรงเรียนบ้านไร่พิทยาคม อำเภอศรีสำโรง จังหวัดสุโขทัย 64120

Banrai Pittayakhom School, Si Samrong, Sukhothai 64120, Thailand.

[*]Corresponding author: E-mail address: meekoed@hotmail.com

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{p} a_{1j}b_{jn} \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{p} a_{2j}b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{p} a_{mj}b_{jn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ip}b_{pk}$ (Anton, 2005)

ในที่นี้จะเรียกเมทริกซ์ A เมทริกซ์ B และเมทริกซ์ AB ว่า **เมทริกซ์ตัวตั้ง** (matrix multiplicand) **เมทริกซ์ตัวคูณ** (matrix multiplier) และ**เมทริกซ์ผลคูณ** (matrix product) ตามลำดับ

บทนิยาม 2 กึ่งจัตุรัสกล (semi-magic square) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีผลรวมของจำนวนในแต่ละแถว และแต่ละหลักมีค่าเท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่ง (Beck et al., 2003)

บทนิยาม 3 จัตุรัสกล (magic square) คือ กึ่งจัตุรัสกลที่ผลรวมของจำนวนในแต่ละแนวทแยงมุมมีค่าเท่ากับผลรวมของจำนวนในแต่ละแถวและแต่ละหลักด้วย (Beck et al., 2003)

ผลการวิจัยหลัก

ทฤษฎีบท 4 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ และ C = AB ถ้า $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = k$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,3,\ldots,p\}$ แล้ว $\sum_{i=1}^{m} c_{ij} = k\sum_{i=1}^{p} b_{ij}$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = k$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,3,\ldots,p\}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
&(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1})b_{11} = kb_{11}, (a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1})b_{12} = kb_{12}, \ldots, \\
&(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1})b_{1n} = kb_{1n} \\
&(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2})b_{21} = kb_{21}, (a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2})b_{22} = kb_{22}, \ldots, \\
&(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2})b_{2n} = kb_{2n} \\
&\vdots \\
&(a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})b_{p1} = kb_{p1}, (a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})b_{p2} = kb_{p2}, \ldots, \\
&(a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})b_{pn} = kb_{pn}
\end{aligned}$$

และจะได้ว่า

$$(a_{11}+a_{21}+...+a_{m1})b_{11}+(a_{12}+a_{22}+...+a_{m2})b_{21}+...+(a_{1p}+a_{2p}+...+a_{mp})b_{p1}=k\sum_{i=1}^{p}b_{i1}$$

$$(a_{11}+a_{21}+...+a_{m1})b_{12}+(a_{12}+a_{22}+...+a_{m2})b_{22}+...+(a_{1p}+a_{2p}+...+a_{mp})b_{p2}=k\sum_{i=1}^{p}b_{i2}$$

$$\vdots$$

$$(a_{11}+a_{21}+...+a_{m1})b_{1n}+(a_{12}+a_{22}+...+a_{m2})b_{2n}+...+(a_{1p}+a_{2p}+...+a_{mp})b_{pn}=k\sum_{i=1}^{p}b_{in}$$

จัดกลุ่มใหม่จะได้ว่า

$$(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+...+a_{1p}b_{p1})+(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+...+a_{2p}b_{p1})+...+$$
$$(a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+...+a_{mp}b_{p1})=k\sum_{i=1}^{p}b_{i1}$$

$$(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+...+a_{1p}b_{p2})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+...a_{2p}b_{p2})+...+$$
$$(a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+...+a_{mp}b_{p2})=k\sum_{i=1}^{p}b_{i2}$$

$$\vdots$$

$$(a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+...+a_{1p}b_{pn})+(a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+...+a_{2p}b_{pn})+...+$$
$$(a_{m1}b_{1n}+a_{m2}b_{2n}+...+a_{mp}b_{pn})=k\sum_{i=1}^{p}b_{in}$$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{m}c_{ij}=k\sum_{i=1}^{p}b_{ij}$ สำหรับทุก ๆ $j\in\{1,2,3,...,n\}$

ทฤษฎีบท 5 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ และ $C = AB$ ถ้า $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=k$ สำหรับทุก ๆ $i\in\{1,2,3,...,p\}$ แล้ว $\sum_{j=1}^{n}c_{ij}=k\sum_{j=1}^{p}a_{ij}$ สำหรับทุก ๆ $i\in\{1,2,3,...,m\}$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=k$ สำหรับทุก ๆ $i\in\{1,2,3,...,p\}$

จะได้ว่า $a_{11}(b_{11}+b_{12}+...+b_{1n})=ka_{11}, a_{21}(b_{11}+b_{12}+...+b_{1n})=ka_{21},...,$

$$a_{m1}(b_{11}+b_{12}+...+b_{1n})=ka_{m1}$$
$$a_{12}(b_{21}+b_{22}+...+b_{2n})=ka_{12}, a_{22}(b_{21}+b_{22}+...+b_{2n})=ka_{22},...,$$
$$a_{m2}(b_{21}+b_{22}+...+b_{2n})=ka_{m2}$$
$$\vdots$$
$$a_{1p}(b_{p1}+b_{p2}+...+b_{pn})=ka_{1p}, a_{2p}(b_{p1}+b_{p2}+...+b_{pn})=ka_{2p},...,$$
$$a_{mp}(b_{p1}+b_{p2}+...+b_{pn})=ka_{mp}$$

และจะได้ว่า

$$a_{11}(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n})+a_{12}(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n})+\ldots+$$
$$a_{1p}(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})= k\sum_{j=1}^{p}a_{1j}$$
$$a_{21}(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n})+a_{22}(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n})+\ldots+$$
$$a_{2p}(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})= k\sum_{j=1}^{p}a_{2j}$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n})+a_{m2}(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n})+\ldots+$$
$$a_{mp}(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})= k\sum_{j=1}^{p}a_{mj}$$

จัดกลุ่มใหม่จะได้ว่า

$$(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1p}b_{p1})+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\ldots+a_{1p}b_{p2})+\ldots+$$
$$(a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\ldots+a_{1p}b_{pn})=k\sum_{j=1}^{p}a_{1j}$$
$$(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{2p}b_{p1})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2p}b_{p2})+\ldots+$$
$$(a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\ldots+a_{2p}b_{pn})=k\sum_{j=1}^{p}a_{2j}$$
$$\vdots$$
$$(a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\ldots+a_{mp}b_{p1})+(a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\ldots+a_{mp}b_{p2})+\ldots+$$
$$(a_{m1}b_{1n}+a_{m2}b_{2n}+\ldots+a_{mp}b_{pn})=k\sum_{j=1}^{p}a_{mj}$$

นั่นคือ $\sum_{j=1}^{n}c_{ij}=k\sum_{j=1}^{p}a_{ij}$ สำหรับทุก ๆ $i\in\{1,2,3,\ldots,m\}$

ทฤษฎีบท 6 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ และ $C = AB$ เมื่อ $a_{ij},b_{ij}\in I$ ถ้า $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\neq\sum_{i=1}^{m}a_{ik}$ สำหรับบาง $j,k\in\{1,2,3,\ldots,p\}$ แล้วตัวหารร่วมของ $\sum_{i=1}^{m}a_{i1}, \sum_{i=1}^{m}a_{i2},\ldots,\sum_{i=1}^{m}a_{ip}$ จะหาร $\sum_{i=1}^{m}c_{ij}$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ $j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$

พิสูจน์ ให้ตัวหารร่วมของ $\sum_{i=1}^{m}a_{i1}, \sum_{i=1}^{m}a_{i2},\ldots,\sum_{i=1}^{m}a_{ip}$ เท่ากับ k

โดยบทนิยามของตัวหารร่วมจะได้ว่า

$$k\left|(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1}),k\right|(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2}),\ldots,k\left|(a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})\right.$$

และจะได้ว่า

$$k\left|(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1})b_{11},k\right|(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2})b_{21},\ldots,k\left|(a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})b_{p1}\right.$$
$$k\left|(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1})b_{12},k\right|(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2})b_{22},\ldots,k\left|(a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})b_{p2}\right.$$
$$\vdots$$
$$k\left|(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1})b_{1n},k\right|(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2})b_{2n},\ldots,k\left|(a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})b_{pn}\right.$$

ทำให้ได้ว่า

$$k\,\big|\,[(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1})b_{11}+(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2})b_{21}+\ldots+(a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})b_{p1}]$$
$$k\,\big|\,[(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1})b_{12}+(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2})b_{22}+\ldots+(a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})b_{p2}]$$
$$\vdots$$
$$k\,\big|\,[(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{m1})b_{1n}+(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{m2})b_{2n}+\ldots+(a_{1p}+a_{2p}+\ldots+a_{mp})b_{pn}]$$

จัดกลุ่มใหม่จะได้ว่า

$$k\,\big|\,[(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1p}b_{p1})+(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{2p}b_{p1})+\ldots+ (a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\ldots+a_{mp}b_{p1})]$$
$$k\,\big|\,[(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\ldots+a_{1p}b_{p2})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2p}b_{p2})+\ldots+ (a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\ldots+a_{mp}b_{p2})]$$
$$\vdots$$
$$k\,\big|\,[(a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\ldots+a_{1p}b_{pn})+(a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\ldots+a_{2p}b_{pn})+\ldots+ (a_{m1}b_{1n}+a_{m2}b_{2n}+\ldots+a_{mp}b_{pn})]$$

นั่นคือ $k\,\Big|\sum_{i=1}^{m} c_{i1},\ k\,\Big|\sum_{i=1}^{m} c_{i2},\ \ldots,\ k\,\Big|\sum_{i=1}^{m} c_{in}$

ทฤษฎีบท 7 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times p}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ และ $C = AB$ เมื่อ $a_{ij}, b_{ij} \in I$ ถ้า $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \neq \sum_{j=1}^{n} b_{kj}$ สำหรับบาง $i, k \in \{1,2,3,\ldots,p\}$ แล้วตัวหารร่วมของ $\sum_{j=1}^{n} b_{1j}, \sum_{j=1}^{n} b_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} b_{pj}$ จะหาร $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ ลงตัว สำหรับทุก ๆ $i \in \{1,2,3,\ldots,m\}$

พิสูจน์ ให้ตัวหารร่วมของ $\sum_{j=1}^{n} b_{1j}, \sum_{j=1}^{n} b_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} b_{pj}$ เท่ากับ k

โดยบทนิยามของตัวหารร่วมจะได้ว่า

$$k\,\big|\,(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n}),\ k\,\big|\,(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n}),\ldots,\ k\,\big|\,(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})$$

และจะได้ว่า

$$k\,\big|\,a_{11}(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n}),\ k\,\big|\,a_{12}(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n}),\ldots,\ k\,\big|\,a_{1p}(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})$$
$$k\,\big|\,a_{21}(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n}),\ k\,\big|\,a_{22}(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n}),\ldots,\ k\,\big|\,a_{2p}(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})$$
$$\vdots$$
$$k\,\big|\,a_{m1}(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n}),\ k\,\big|\,a_{m2}(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n}),\ldots,\ k\,\big|\,a_{mp}(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})$$

ทำให้ได้ว่า

$$k\,\big|\,[a_{11}(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n})+a_{12}(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n})+\ldots+a_{1p}(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})]$$
$$k\,\big|\,[a_{21}(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n})+a_{22}(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n})+\ldots+a_{2p}(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})]$$
$$\vdots$$
$$k\,\big|\,[a_{m1}(b_{11}+b_{12}+\ldots+b_{1n})+a_{m2}(b_{21}+b_{22}+\ldots+b_{2n})+\ldots+a_{mp}(b_{p1}+b_{p2}+\ldots+b_{pn})]$$

จัดกลุ่มใหม่จะได้ว่า

$$k\,\Big|\,[(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1p}b_{p1})+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\ldots+a_{1p}b_{p2})+\ldots+(a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\ldots+a_{1p}b_{pn})]$$

$$k\,\Big|\,[(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{2p}b_{p1})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2p}b_{p2})+\ldots+(a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\ldots+a_{2p}b_{pn})]$$

$$\vdots$$

$$k\,\Big|\,[(a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\ldots+a_{mp}b_{p1})+(a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\ldots+a_{mp}b_{p2})+\ldots+(a_{m1}b_{1n}+a_{m2}b_{2n}+\ldots+a_{mp}b_{pn})]$$

นั่นคือ $k\,\Big|\sum_{j=1}^{n}c_{1j},\ k\,\Big|\sum_{j=1}^{n}c_{2j},\ \ldots,\ k\,\Big|\sum_{j=1}^{n}c_{mj}$

ผลจากทฤษฎีบท 4-7 เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างผลรวมของสมาชิกของเมทริกซ์กับดีเทอร์มิแนนต์และสมบัติบางประการของกึ่งจัตุรัสกล ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 8 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ถ้า $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0$ สำหรับทุก ๆ $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ แล้ว det (A) = 0

พิสูจน์ จาก $\operatorname{adj}(A)\cdot A=\det(A)\cdot I_n$ (Nicholson, 2009) และทฤษฎีบท 5

บทแทรก 9 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ถ้า $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=0$ สำหรับทุก ๆ $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ แล้ว det (A) = 0

พิสูจน์ จาก $A\cdot\operatorname{adj}(A)=\det(A)\cdot I_n$ (Nicholson, 2009) และทฤษฎีบท 4

บทแทรก 10 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ถ้าตัวหารร่วมของ $\sum_{j=1}^{n}a_{1j},\sum_{j=1}^{n}a_{2j},\ldots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}$ สามารถหาได้ แล้วตัวหารร่วมของ $\sum_{j=1}^{n}a_{1j},\sum_{j=1}^{n}a_{2j},\ldots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}$ จะหาร det (A) ลงตัว

พิสูจน์ จาก $\operatorname{adj}(A)\cdot A=\det(A)\cdot I_n$ และทฤษฎีบท 7

บทแทรก 11 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ถ้าตัวหารร่วมของ $\sum_{i=1}^{n}a_{i1},\sum_{i=1}^{n}a_{i2},\ldots,\sum_{i=1}^{n}a_{in}$ สามารถหาได้ แล้วตัวหารร่วมของ $\sum_{i=1}^{n}a_{i1},\sum_{i=1}^{n}a_{i2},\ldots,\sum_{i=1}^{n}a_{in}$ จะหาร det (A) ลงตัว

พิสูจน์ จาก $A\cdot\operatorname{adj}(A)=\det(A)\cdot I_n$ และทฤษฎีบท 6

บทแทรก 12 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ $\operatorname{adj}(A)=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ ถ้า $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0$ สำหรับทุก ๆ $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ แล้ว $c_{1j}=c_{2j}=\ldots=c_{nj}$ สำหรับทุก ๆ $j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$

พิสูจน์ ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

จะแสดงว่า $c_{1j} = c_{2j} = \ldots = c_{nj}$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$

เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $A_{i1} = A_{i2} = \ldots = A_{in}$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ เมื่อ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$

กรณีที่ 1 n เป็นจำนวนคี่ i เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า

$$A_{i1} - A_{i2} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} + a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} + a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$A_{i3} - A_{i2} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} + a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} + a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$A_{in} - A_{i,n-1} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n-1} + a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n-1} + a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

กรณีที่ 2 n เป็นจำนวนคี่ i เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า

$$A_{i2} - A_{i1} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1}+a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}+a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$A_{i2} - A_{i3} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2}+a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2}+a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$A_{i,n-1} - A_{in} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n-1}+a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n-1}+a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

กรณีที่ 3 n เป็นจำนวนคู่ i เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า

$$A_{i1} - A_{i2} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1}+a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}+a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$A_{i3} - A_{i2} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2}+a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2}+a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$$A_{i,n-1} - A_{in} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n-1}+a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n-1}+a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

กรณีที่ 4 n เป็นจำนวนคู่ i เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า

$$A_{i2} - A_{i1} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1}+a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}+a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$A_{i2} - A_{i3} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2}+a_{i-1,3} & a_{i-1,4} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2}+a_{i+1,3} & a_{i+1,4} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A_{in} - A_{i,n-1} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n-1}+a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n-1}+a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

เนื่องจาก $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1,2,3,...,n\}$

ดังนั้นโดยบทแทรก 8 จะได้ว่า $A_{i1} - A_{i2} = 0, A_{i2} - A_{i3} = 0,..., A_{i,n-1} - A_{in} = 0$

นั่นคือ $A_{i1} = A_{i2} = ... = A_{in}$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1,2,3,...,n\}$

เพราะฉะนั้น $c_{1j} = c_{2j} = ... = c_{nj}$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,3,...,n\}$

บทแทรก 13 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ และ $\operatorname{adj}(A) = \left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ ถ้า $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,3,...,n\}$ แล้ว $c_{i1} = c_{i2} = ... = c_{in}$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1,2,3,...,n\}$

พิสูจน์ จาก $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,3,...,n\}$ จะได้ว่า ผลรวมในแต่ละแถวของ A^T เท่ากับ 0

โดยบทแทรก 12 จะได้ว่า $c_{1j}^T = c_{2j}^T = ... = c_{nj}^T$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1,2,3,...,n\}$ เมื่อ $\operatorname{adj}(A^T) = \left[c_{ij}^T\right]_{n\times n}$

ดังนั้น $c_{i1} = c_{i2} = ... = c_{in}$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1,2,3,...,n\}$

บทแทรก 14 ถ้า A เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ m ซึ่ง $m \neq 0$ และ $\det(A) \neq 0$ แล้ว adj (A) และ A^{-1} จะเป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{\det(A)}{m}$ และ $\frac{1}{m}$ ตามลำดับ

พิสูจน์ ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ m

จะได้ว่า $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = m$ สำหรับทุก ๆ $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = m$ สำหรับทุก ๆ $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

จาก $\operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$ และทฤษฎีบท 5 จะได้ว่าผลรวมของสมาชิกแต่ละแถวของ adj (A) เท่ากับ $\dfrac{\det(A)}{m}$

จาก $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$ และทฤษฎีบท 4 จะได้ว่าผลรวมของสมาชิกแต่ละหลักของ adj (A) เท่ากับ $\dfrac{\det(A)}{m}$

ดังนั้น adj (A) เป็นกึ่งจัตุรัสกลซึ่งมีผลบวกเท่ากับ $\dfrac{\det(A)}{m}$

จาก $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$ (Lay, 2003) จะได้ว่า A^{-1} เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\dfrac{1}{m}$

บทแทรก 15 ถ้า A เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ m ซึ่ง $m \neq 0$ และ $\det(A) \neq 0$ แล้ว adj (A) และ A^{-1} จะเป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\dfrac{\det(A)}{m}$ และ $\dfrac{1}{m}$ ตามลำดับ

พิสูจน์ เนื่องจากทุก ๆ จัตุรัสกลเป็นกึ่งจัตุรัสกล ดังนั้นบทแทรกเป็นจริง

บทแทรก 16 ถ้า A เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 0 แล้ว adj (A) จะเป็นจัตุรัสกลที่มีสมาชิกในแต่ละตำแหน่งเหมือนกัน

พิสูจน์ โดยบทแทรก 12 และบทแทรก 13

ตัวอย่างเชิงตัวเลข

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 28 \\ 23 & 49 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวของเมทริกซ์ B คือ 8 และ 16

ตัวหารร่วมของ 8 และ 16 คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ และ ± 8

ผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวของเมทริกซ์ AB คือ 40 และ 72

โดยทฤษฎีบท 7 จะเห็นว่า $\pm 1 | 40$, $\pm 1 | 72$, $\pm 2 | 40$, $\pm 2 | 72$, $\pm 4 | 40$, $\pm 4 | 72$, $\pm 8 | 40$ และ $\pm 8 | 72$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของเมทริกซ์ A คือ 8 , 12 และ 16 ตามลำดับ

ตัวหารร่วมของ 8 , 12 และ 16 คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ และ $\det(A) = 180$

โดยบทแทรก 11 จะเห็นว่า $\pm 1 \mid 180$, $\pm 2 \mid 180$, $\pm 4 \mid 180$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ -8 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า A เป็นเมทริกซ์ที่มีผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวเท่ากับ 0 และจะได้ว่า

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -34 & 18 & 41 \\ -34 & 18 & 41 \\ -34 & 18 & 41 \end{bmatrix}$$

โดยบทแทรก 12 จะเห็นว่า adj (A) เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกในหลักเดียวกันเหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & -7 & -8 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า A เป็นเมทริกซ์ที่มีผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักเท่ากับ 0 และจะได้ว่า

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -20 & -20 & -20 & -20 \\ 25 & 25 & 25 & 25 \\ 189 & 189 & 189 & 189 \\ -141 & -141 & -141 & -141 \end{bmatrix}$$

โดยบทแทรก 13 จะเห็นว่า adj (A) เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแถวเดียวกันเหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 9 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า A เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 15

จะได้ว่า det (A) = -360

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -68 & -8 & 52 \\ 7 & 22 & -53 \\ 37 & -38 & -23 \end{bmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{90} & \frac{1}{45} & -\frac{13}{90} \\ -\frac{7}{360} & -\frac{11}{180} & \frac{53}{360} \\ -\frac{37}{360} & \frac{19}{180} & \frac{23}{360} \end{bmatrix}$$

โดยบทแทรก 14 จะเห็นว่า adj (A) เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ -24 ($-24 = \frac{-360}{15}$)

และ A^{-1} เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{15}$

ตัวอย่างที่ 6 ให้ $A = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 15 & 12 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \\ 9 & 11 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า A เป็นจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 34

จะได้ว่า det (A) = 6,528

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 779 & 677 & -411 & -853 \\ 479 & -785 & 303 & 1153 \\ 547 & 371 & -717 & 1085 \\ 439 & -71 & 1017 & -1193 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{779}{6528} & \frac{677}{6528} & -\frac{137}{2176} & -\frac{853}{6528} \\ \frac{479}{6528} & -\frac{785}{6528} & \frac{101}{2176} & \frac{1153}{6528} \\ \frac{547}{6528} & \frac{371}{6528} & -\frac{239}{2176} & \frac{1085}{6528} \\ \frac{439}{6528} & -\frac{71}{6528} & \frac{339}{2176} & -\frac{1193}{6528} \end{bmatrix}$$

โดยบทแทรก 15 จะเห็นว่า adj (A) เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 192 ($192 = \frac{6,528}{34}$)

และ A^{-1} เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{34}$

ตัวอย่างที่ 7 ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า A เป็นกึ่งจัตุรัสกลที่มีผลบวกเท่ากับ 0 และจะได้ว่า

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

โดยบทแทรก 16 จะเห็นว่า adj (A) เป็นจัตุรัสกลที่มีสมาชิกในแต่ละตำแหน่งเหมือนกัน

บทสรุป

จากการศึกษาเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ เราได้พบสมบัติต่างๆ ที่สำคัญหลายประการ ดังนี้ 1) ตัวหารร่วมของผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของเมทริกซ์ตัวตั้งจะหารผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของเมทริกซ์ ผลคูณลงตัว 2) ตัวหารร่วมของผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวของเมทริกซ์ตัวคูณจะหารผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวของเมทริกซ์ผลคูณลงตัว 3) ตัวหารร่วมของผลรวมของสมาชิกในแต่ละหลักของเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ จะหารค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นั้นลงตัว และ 4) ตัวหารร่วมของผลรวมของสมาชิกในแต่ละแถวของเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ จะหารค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นั้นลงตัว ซึ่งเราสามารถนำสมบัติดังกล่าวไปใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของการคูณเมทริกซ์และค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้อีกด้วย

เอกสารอ้างอิง

Anton, H. 2005. Elementary Linear Algebra. 9th ed., John Wiley & Sons, New York, 315 p.

Beck, M., Cohen, M., Cuomo, J. and Gribelyuk, P. 2003. The number of “magic” squares,cubes, and hypercubes. Amer. Math. Monthly. 110: 707-717.

Lay, D. C. 2003. Linear algebra and its applications. 3rd ed., Addison-Wesley, Massachusetts, 492 p.

Leon, S. J. 2006. Linear Algebra with Applications. 7th ed., Pearson Prentice-Hall, New Jersey, 523 p.

Nicholson, W. K. 2009. Linear algebra : with applications. 6th ed., McGraw Hill, Boston, 566 p.

Received 10 November 2014

Accepted 30 April 2015