ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8

Generalized beauty: the product of the digit number 8 and the arranged number by decreasing from digit number 8 to the right

พลอธิป พวงสำเภา,[1] วราภรณ์ ไก่แจ้,[2] ศรัญญา อารยะรังษี[3] และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์[4]*

Polatip Poungsumpao,[1] Waraphorn Kaijae[2] , Saranya Arayarangsi[3] and Aiyared Iampan[4*]

ABSTRACT

The main purpose of this article is to present the beauty of a general form of the product of the digit number 8 and the arranged number by decreasing from digit number 8 to the right. The results showed that the general form of this product is $8 \cdot 876\ldots(-n) = 70123\ldots(8+(n-1))(10+(2\cdot n))$ for all positive integer n.

Keywords: product, arranged number by decreasing from digit number 8 to the right

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์หลักของบทความนี้เพื่อนำเสนอความสวยงามของรูปทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลคูณดังกล่าว ดังนี้ $8 \cdot 876\ldots(-n) = 70123\ldots(8+(n-1))(10+(2\cdot n))$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

คำสำคัญ: ผลคูณ จำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8

[1,2,3,4*]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อ.เมือง จ.พะเยา 56000

[1,2,3,4*]Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000, Thailand.

[*]Corresponding author: Tel. 054 466 666 ต่อ 1792 Fax 054 466 664 E-mail aiyared.ia@up.ac.th

บทนำ

การคำนวณหาผลคูณของจำนวนหลายหลักนั้น แม้ว่าจะไม่ใช่เรื่องยุ่งยากมากนักแต่ถ้าหากเราจะคำนวณหาผลลัพธ์ก็จะต้องใช้เวลามากพอสมควร เราจึงหาเครื่องมือช่วยในการคำนวณ เช่น คอมพิวเตอร์ เครื่องคิดเลข แต่เนื่องจากคอมพิวเตอร์ไม่สะดวกในการพกพาและเครื่องคิดเลขก็อาจใช้งานไม่ได้กับจำนวนที่มีจำนวนหลักมากๆ ท้ายที่สุด ถ้าเราสามารถหาสูตรในการหาผลลัพธ์ทางพีชคณิตของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 จะเป็นการเพิ่มความสะดวกและยังประหยัดเวลาในการคำนวณผลคูณของการคำนวณนี้ ด้วยเหตุนี้จึงเป็นแรงบันดาลใจให้ผู้เรียนจะศึกษาและหารูปทั่วไปของความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8

สำหรับการศึกษาและหารูปทั่วไปทางพีชคณิตของจำนวนที่เลขเรียงกันนั้น ได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ โดยได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ ซึ่งนิยามใน (1) สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ด้วยสัญลักษณ์ $a = {}_q r$ เมื่อ r และ q เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \le r < 10$ ซึ่ง $a = 10 \cdot q + r$ ดังนี้ อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 1 ไปทางซ้ายกับเลขโดด 9 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$({}_q r \leftarrow 1) \times 9 = \begin{cases} {}_q(r-1)\,\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_q(r-1)}\,9, & 1 \le r < 10 \\ {}_{q-1}9\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{q-1}9}9, & r = 0 \end{cases}$$

เมื่อ ${}_q r \leftarrow 1 := {}_q r\,{}_q(r-1)\ldots{}_1 1_1 09\ldots321$ สุจิตรา และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(2 \cdot n - 1)\ldots 531 \times 9 = (2 \cdot n - 2)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=n-1}9$$

กิตติยา และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของพหุคูณของเลขโดด 9 ด้วยจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 9 ไปทางขวาถึงจำนวนเต็มใดๆ กับจำนวนเต็มที่มีค่าน้อยกว่าเลขหลักแรกของจำนวนที่เลขเรียงกันข้างต้นอยู่สองค่า โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$[(9 \to (-n)) \cdot 9] - (n+2) = \underbrace{888\ldots8}_{\#(8)=11+n}$$

รุ่งนภา และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของพหุคูณของเลขโดด 8 ด้วยจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 1 ไปทางขวาถึงจำนวนเต็มบวกใดๆ กับจำนวนหลักแรกของจำนวนที่เลขเรียงกันข้างต้น โดยได้พบว่าผลบวกนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(1 \to n) \times 8 + n = 9 \to (10 - n)$$

วนิดา และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของเลขโดด 3 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(3\cdot n)\ldots 963\times 9=((3\cdot n)-1)\underbrace{666\ldots 6}_{\#(6)=n-1}7$$

ประไพศรี, รสสุคนธ์ และ อัยเรศ (2558) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของพหุคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลางถึง n กับจำนวน $n-1$ และผลบวกของพหุคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวาถึง n กับจำนวน $n-1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยที่ $n\geq 2$ โดยได้พบว่าผลบวกนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\geq 2$ จะได้ว่า

$$(1\rightarrow n\leftarrow 1)\times 9+(n-1)=\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=n-1}0\underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=n-2}9(n-2)$$

และ $$(n\leftarrow 1\rightarrow n)\times 9+(n-1)=(n-1)\underbrace{888\ldots 8}_{\#(8)=n-2}9\underbrace{111\ldots 1}_{\#(1)=n-2}09$$

จากบทความข้างต้น พบว่าการประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือในการหาผลลัพธ์นั้นมีประโยชน์เป็นอย่างมาก ฉะนั้น บทความนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือและพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ได้แก่ขั้นตอนวิธีการหารและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b\neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a=b\cdot q+r \text{ และ } 0\leq r<|b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k\geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\geq n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร (อัยเรศ, 2554) และ (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b=10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a=10\cdot q+r$ และ $0\leq r<10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a:={}_{q}r \tag{1}$$

เช่น

$0={}_{0}0$	$20={}_{2}0$	$60={}_{6}0$	$180={}_{18}0$	$200={}_{20}0$
$1={}_{0}1$	$21={}_{2}1$	$61={}_{6}1$	$181={}_{18}1$	$201={}_{20}1$
$2={}_{0}2$	$22={}_{2}2$	$62={}_{6}2$	$182={}_{18}2$	$202={}_{20}2$
$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$
$9={}_{0}9$	$29={}_{2}9$	$69={}_{6}9$	$189={}_{18}9$	$209={}_{20}9$

และ

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_{0}0 & -20 = {}_{-2}0 & -60 = {}_{-6}0 & -180 = {}_{-18}0 & -200 = {}_{-20}0 \\
-1 = {}_{-1}9 & -21 = {}_{-3}9 & -61 = {}_{-7}9 & -181 = {}_{-19}9 & -201 = {}_{-21}9 \\
-2 = {}_{-1}8 & -22 = {}_{-3}8 & -62 = {}_{-7}8 & -182 = {}_{-19}8 & -202 = {}_{-21}8 \\
\vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots & \vdots \;\vdots\; \vdots \\
-9 = {}_{-1}1 & -29 = {}_{-3}1 & -69 = {}_{-7}1 & -189 = {}_{-19}1 & -209 = {}_{-21}1
\end{array}$$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_{0}r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \le r < 10$

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ ${}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (1) ทั้งหมด นั่นคือ

$$ {}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R} = \{ {}_{q}r \mid r, q \in \mathbf{Z} \text{ และ } 0 \le r < 10 \} \tag{2}$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (1) นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่ายจะแนะนำการแปลงเลขจาก (1) กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (1) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_{q}r$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $279_{13}266_{55}6415_{24}1_{9}7$, $876543210(-1)$ และ $876543210(-1)(-2)$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือหรือจำนวนเต็มใด ๆ กลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
279_{13}266_{55}6415_{24}1_{9}7 &= 27(9+13)26(6+55)641(5+24)(1+9)7 \\
&= 27(22)26(61)641(29)(10)7 \\
&= 27_{2}226_{6}1641_{2}9_{1}07 \\
&= 2(7+2)22(6+6)164(1+2)(9+1)07 \\
&= 2922(12)1643(10)07 \\
&= 2922_{1}21643_{1}007 \\
&= 292(2+1)2164(3+1)007 \\
&= 292321644007
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
876543210(-1) &= 876543210_{-1}9 \\
&= 87654321(0+(-1))9 \\
&= 87654321(-1)9 \\
&= 87654321_{-1}99 \\
&= 8765432(1+(-1))99 \\
&= 8765432099
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
876543210(-1)(-2) &= 876543210\,{}_{-1}9\,{}_{-1}8 \\
&= 87654321(0+(-1))(9+(-1))8 \\
&= 87654321(-1)88 \\
&= 87654321\,{}_{-1}988 \\
&= 8765432(1+(-1))988 \\
&= 87654320988
\end{aligned}$$

เรายังพบอีกว่า $876543210(-1) = (8\cdot 10^9)+(7\cdot 10^8)+(6\cdot 10^7)+\ldots+(0\cdot 10)+(-1)$ และ $876543210(-1)(-2) = (8\cdot 10^{10})+(7\cdot 10^9)+(6\cdot 10^8)+\ldots+((-1)\cdot 10)+(-2)$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้นบทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) (บน ${}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$ โดย

$${}_q r \,(\, {}_t s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a \;; & r+s \ge 10, r+s = {}_b a \end{cases}$$ สำหรับทุก ${}_q r, {}_t s \in {}_{\mathbf{Z}}\mathrm{R}$

บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ $n \in \mathbf{N}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ แล้ว

$$-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ;\ r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ;\ r \ne 0 \end{cases} \tag{3}$$

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเศษเหลือ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, m \in \mathbf{Z}$ ซึ่ง $0 \le s_i \le 9$ จะได้ว่า

$${}_m s_1 s_2 s_3 \ldots s_n = m \cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} + s_1 s_2 s_3 \ldots s_n \tag{4}$$

ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตเราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 ดังนี้

$$
\begin{array}{llll}
8\cdot 8 & = 64 & = 7{}_{-1}4 & = 7(10+(2\cdot(-8))) \\
8\cdot 87 & = 696 & = 70{}_{-1}6 & = 7(8+(-7-1))(10+(2\cdot(-7))) \\
8\cdot 876 & = 7008 & = 701{}_{-1}8 & = 70(8+(-6-1))(10+(2\cdot(-6))) \\
8\cdot 8765 & = 70120 & = 7012{}_{-1}0 & = 701(8+(-5-1))(10+(2\cdot(-5))) \\
8\cdot 87654 & = 701232 & = 701232 & = 7012(8+(-4-1))(10+(2\cdot(-4))) \\
8\cdot 876543 & = 7012344 & = 7012344 & = 70123(8+(-3-1))(10+(2\cdot(-3))) \\
8\cdot 8765432 & = 70123456 & = 70123456 & = 701234(8+(-2-1))(10+(2\cdot(-2))) \\
8\cdot 87654321 & = 701234568 & = 701234568 & = 7012345(8+(-1-1))(10+(2\cdot(-1))) \\
8\cdot 876543210 & = 7012345680 & = 701234567{}_{1}0 & = 70123456(8+(-0-1))(10+(2\cdot(-0))) \\
8\cdot 876543210(-1) & = 70123456792 & = 7012345678{}_{1}2 & = 701234567(8+(-(-1)-1))(10+(2\cdot(-(-1)))) \\
8\cdot 876543210(-1)(-2) & = 701234567904 & = 7012345678{}_{0}9{}_{1}4 & = 7012345678(8+(-(-2)-1))(10+(2\cdot(-(-2))))
\end{array}
$$

(5)

จากความสัมพันธ์ (5) เราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$8\cdot 876\ldots n = 70123\ldots(8+(-n-1))(10+(2\cdot(-n)))$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $n=7,6,5,\ldots,0$

ซึ่งเราสังเกตเห็นว่าผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 เป็นจำนวนที่หลักมากที่สุดเป็นเลขโดด 7 หลักหน่วยเป็นจำนวน $10+(2\cdot(-n))$ และหลักที่เหลือเป็นจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางขวาจากเลขโดด 0 ถึงจำนวน $8+(-n-1)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $n=7,6,5,\ldots,0$

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างเพื่อนำไปสู่การศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 ดังนี้

ตัวอย่าง 1 จงหาผลลัพธ์ของ $8\cdot[(8\cdot 10^{11})+(7\cdot 10^{10})+(6\cdot 10^{9})+\ldots+((-2)\cdot 10)+(-3)]$ สามารถหาได้ถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (5) ที่เราพบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
8\cdot[(8\cdot 10^{11})+(7\cdot 10^{10})+(6\cdot 10^{9})+\ldots+((-2)\cdot 10)+(-3)] &= 8\cdot 876543210(-1)(-2)(-3) \\
&= 8\cdot 876543210{}_{-1}9{}_{-1}8{}_{-1}7 \\
&= 8\cdot 87654321(-1)877 \\
&= 8\cdot 87654321{}_{-1}9877 \\
&= 8\cdot 876543209877 \\
&= 7012345679016 \\
&= 70123456789{}_{1}0{}_{1}6 \\
&= 70123456789(10)(16) \\
&= 70123456789(8+(3-1))(10+(2\cdot 3))
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรม Maple

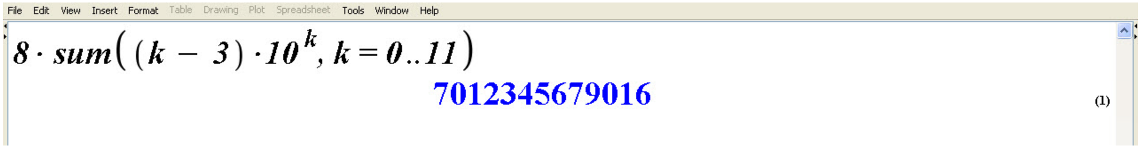

Figure1 $8\cdot[(8\cdot 10^{11})+(7\cdot 10^{10})+(6\cdot 10^{9})+\ldots+((-2)\cdot 10)+(-3)]$

ฉะนั้น จากความสัมพันธ์ (5) เราจึงสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 ได้หรือไม่

(2) หากเราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณนี้ได้ แล้วรูปทั่วไปของผลคูณนี้จะมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (5) ที่เราพบหรือไม่

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$8\cdot 876\ldots(-n)=70123\ldots(8+(n-1))(10+(2\cdot n)) \qquad (6)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$8\cdot 876\ldots(-n)=70123\ldots(8+(n-1))(10+(2\cdot n))$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
8\cdot 876\ldots 10(-1) &= 8\cdot 876\ldots 10_{-1}9\\
&= 8\cdot 876\ldots 21_{-1}99\\
&= 8\cdot 876\ldots 32099\\
&= 70123456792\\
&= 7012345678_{1}2\\
&= 7012345678(12)\\
&= 701234567(8+(1-1))(10+(2\cdot 1))
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$8\cdot 876\ldots(-k)=70123\ldots(8+(k-1))(10+(2\cdot k))$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
& 8\cdot 876\ldots(-k)(-(k+1)) \\
&= 8\cdot[876\ldots(-k)0+(-(k+1))] \\
&= [8\cdot 876\ldots(-k)0]+[8\cdot(-(k+1))] \\
&= [8\cdot 876\ldots(-k)]0+[8\cdot(-k)+(-8)] \\
&= [70123\ldots(8+(k-1))(10+(2\cdot k))]0+[8\cdot(-k)+(-8)] \\
&= 70123\ldots(8+(k-1))(10)0+(2\cdot k)0+[((-8)\cdot k)+(-8)] \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+(k-1))_1 00+(2\cdot k)0+[((-8)\cdot k)+(-8)] \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+(k-1))_1 00+(2\cdot k)0+[((2-10)\cdot k)+(2-10)] \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+(k-1))_1 00+(2\cdot k)0+[((2\cdot k)-(10\cdot k))+(2-10)] \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+(k-1))_1 00+(2\cdot k)0+[(2\cdot k)+2-(10\cdot k)-10] \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+(k-1))_1 00+(2\cdot k)0+[(2\cdot k)+2+10-20-(10\cdot k)] \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+(k-1))_1 00+(2\cdot k)0+[(10+(2\cdot k)+2)+(-20-(10\cdot k))] \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+(k-1))_1 00+(2\cdot k)0+[(10+2\cdot(k+1))+(-2-k)0] \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+k)00+(2\cdot k)0+(10+2\cdot(k+1))+(-2-k)0 \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+k)(k-2)(10+2\cdot(k+1)) \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+k)(8-10+k)(10+2\cdot(k+1)) \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+k)(-10)(10+2\cdot(k+1))+(8+k)0 \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+k)_{-1}0(10+2\cdot(k+1))+(8+k)0 \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+(k-1))0(10+2\cdot(k+1))+(8+k)0 \\
&= 70123\ldots(8+(k-2))(8+(k-1))(8+((k+1)-1))(10+2\cdot(k+1))
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$8\cdot 876\ldots(-n)=70123\ldots(8+(n-1))(10+(2\cdot n))$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n □

จากทฤษฎีบทข้างต้น เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่าง 2 ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ $8\cdot[(8\cdot 10^{13})+(7\cdot 10^{12})+(6\cdot 10^{11})+\ldots+((-4)\cdot 10)+(-5)]$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
& 8\cdot[(8\cdot 10^{13})+(7\cdot 10^{12})+(6\cdot 10^{11})+\ldots+((-4)\cdot 10)+(-5)] \\
&= 8\cdot 876543210(-1)(-2)(-3)(-4)(-5) \\
&= 70123456789(10)(11)(8+(5-1))(10+(2\cdot 5)) \\
&= 70123456789_1 0_1 1_1 2_2 0 \\
&= 7012345678(10)1240 \\
&= 7012345678_1 01240 \\
&= 701234567901240
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรม Maple

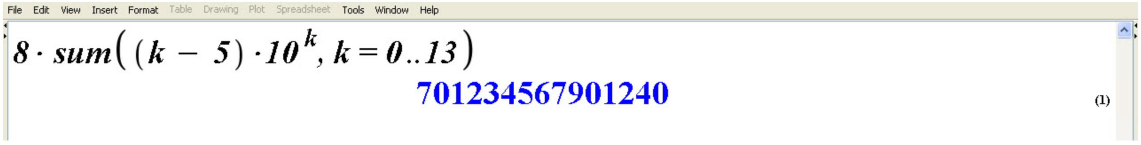

Figure 2 $8\cdot[(8\cdot10^{13})+(7\cdot10^{12})+(6\cdot10^{11})+\ldots+((-4)\cdot10)+(-5)]$

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ $8\cdot[(8\cdot10^{21})+(7\cdot10^{20})+(6\cdot10^{19})+\ldots+((-12)\cdot10)+(-13)]$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&8\cdot[(8\cdot10^{21})+(7\cdot10^{20})+(6\cdot10^{19})+\ldots+((-12)\cdot10)+(-13)]\\
&=8\cdot876543210(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)(-12)(-13)\\
&=70123456789(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(8+(13-1))(10+(2\cdot13))\\
&=70123456789{}_10{}_11{}_12{}_13{}_14{}_15{}_16{}_17{}_18{}_19{}_20{}_36\\
&=7012345678(10)123456789(11)36\\
&=7012345678{}_10123456789{}_1136\\
&=70123456790123456789(10)136\\
&=7012345679012345678{}_10136\\
&=7012345679012345679013 6
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรม Maple

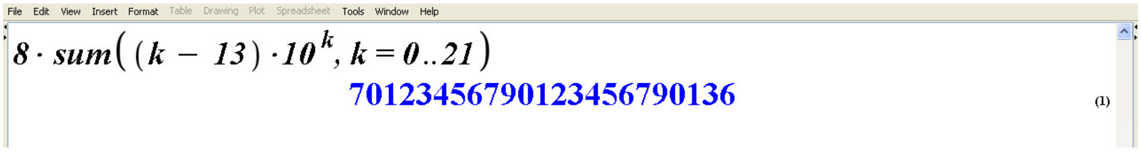

Figure 3 $8\cdot[(8\cdot10^{21})+(7\cdot10^{20})+(6\cdot10^{19})+\ldots+((-12)\cdot10)+(-13)]$

บทสรุป

จากการศึกษาผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 ได้ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$8\cdot876\ldots(-n)=70123\ldots(8+(n-1))(10+(2\cdot n))$$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

2) รูปทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 ที่ได้นั้น มีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (5) ที่เราสังเกตพบ

จากการสังเกตผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ ซึ่งนับได้ว่ารูปทั่วไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไป ของการสังเกตของเรา และกล่าวเช่นเดียวกับ (2) ได้ว่ารูปทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 เป็นอีกความสวยงามวางนัยทั่วไป ในแบบคณิตศาสตร์อีก

รูปแบบหนึ่ง ยิ่งไปกว่านั้นรูปทั่วไปนี้ยังช่วยให้การคำนวณผลคูณของเลขโดด 8 กับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงไปทางขวาจากเลขโดด 8 เป็นเรื่องที่สะดวกและไม่ยุ่งยากเกินไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

กิตติยา ใจเย็น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2557. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: พหุคูณของเลขโดด 9 ด้วยจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 9 ไปทางขวากับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 8. วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต. 10 (1). 116-129.

ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. วารสารนเรศวรพะเยา. 6 (1). 25-30.

ประไพศรี กำแพงแก้ว, รสสุคนธ์ อินตะแสน และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2558. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลบวกของพหุคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ทางซ้ายและขวาเข้าสู่เลขกึ่งกลาง และจำนวนที่เลขที่เรียงกันเพิ่มขึ้นจาก 1 ที่กึ่งกลางไปทางซ้ายและขวา. Thai Journal of Science and Technology. 4(1). 1-13.

รุ่งนภา ศักดิ์อรุณชัย และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2557). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ความสัมพันธ์ทางพีชคณิตระหว่างจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลขโดด 1 ไปทางขวากับจำนวนที่เลขเรียงกันลดลงจากเลขโดด 9ไปทางขวา.วารสารมหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา. 9 (1). 43-56.

วนิดา ราตรีเสน่ห์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2557). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของ 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยพหุคูณของ 3.วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์. 22(4). 474-481.

สุจิตรา เหลาแตว และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2557). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคี่กับเลขโดด 9. วารสารวิจัยมสด สาขามนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์. 10(3). 241-254.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9. วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี. 15(1). 75-83.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์. 8(2). 48-58.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2554). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารนเรศวรพะเยา. 4(2). 29-35.

Clark, W. E. (2002). Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida.

Received 8 May 2015

Accepted 28 December 2015