ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่

Generalized beauty : the product of the digit number 9 and the arranged number increasing to the left by even number

ศิริกานต์ หยดย้อย[1] และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์[2*]

Sirikan Yodyoi[1] and Aiyared Iampan[2*]

ABSTRACT

This paper presents the study and finding on a general form of the product of the digit number 9 and the arranged number increasing to the left by even number. The results show that a general form of this product is

$$(2\cdot n)\ldots 642\times 9=((2\cdot n)-1)\underbrace{77\ldots 7}_{\#(7)=n-1}8 \text{ for all positive integer } n.$$

Keywords: product, the arranged number by increasing to the left by even number and the digit number 9

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลคูณนี้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(2\cdot n)\ldots 642\times 9=((2\cdot n)-1)\underbrace{77\ldots 7}_{\#(7)=n-1}8$$

คำสำคัญ: ผลคูณ จำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ และเลขโดด 9

[1,2*] สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อ.เมือง จ.พะเยา 56000

[1,2*] Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000, Thailand.

*Corresponding author. E-mail address: aiyared.ia@up.ac.th

บทนำ

ในวัยเด็กเราคงเคยไปเที่ยวชมงานนิทรรศการวิทยาศาสตร์จากที่ต่าง ๆ และได้ชมกลวิทยาศาสตร์จากศาสตร์ต่างๆ ซึ่งคณิตศาสตร์ก็เป็นศาสตร์หนึ่งที่มีความน่าตื่นเต้น โดยมีการคิดหาคำตอบอย่างเป็นระบบและมีเอกลักษณ์เป็นของตัวเอง ในปัจจุบัน การศึกษาคณิตศาสตร์อาจจะมีเครื่องมือช่วยในการคำนวณต่างๆ เช่น เครื่องคิดเลขหรือคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ เพื่อความรวดเร็วในการหาคำตอบ แต่ในบางกรณีเครื่องคิดเลขก็อาจจะช่วยเราคิดไม่ได้ ถ้าจำนวนที่เราต้องการคำนวณมีจำนวนหลักมากๆ ฉะนั้นสูตรลัดบางอย่างสำหรับการคำนวณหาคำตอบน่าจะเป็นวิธีการที่เหมาะสมที่สุด ด้วยเหตุนี้เราจะศึกษาและหารูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณ (ในบทความนี้ จะใช้สัญลักษณ์การคูณด้วย $\cdot$ หรือ $\times$) ของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ ที่เราสังเกตเห็นความสัมพันธ์ที่น่าสนใจบางอย่าง ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป และหากเราสามารถหารูปทั่วไปที่แน่นอนหรือสูตรสำหรับการคำนวณได้ ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นสำหรับการคำนวณหาผลคูณนี้นั่นเอง

สำหรับบทความนี้ เราจะใช้จำนวนเศษเหลือในการคำนวณหาผลลัพธ์ของผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือ และพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก คือ ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a = b \cdot q + r \text{ และ } 0 \leq r < |b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร (อัยเรศ, 2554) และ (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b = 10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a = 10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a := {}_q r \tag{1}$$

เช่น

$$\begin{array}{lllll}
0 = {}_0 0 & 20 = {}_2 0 & 180 = {}_{18} 0 & 2210 = {}_{221} 0 & 345670 = {}_{34567} 0 \\
1 = {}_0 1 & 21 = {}_2 1 & 181 = {}_{18} 1 & 2211 = {}_{221} 1 & 345671 = {}_{34567} 1 \\
2 = {}_0 2 & 22 = {}_2 2 & 182 = {}_{18} 2 & 2212 = {}_{221} 2 & 345672 = {}_{34567} 2 \\
\vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
9 = {}_0 9 & 29 = {}_2 9 & 189 = {}_{18} 9 & 2219 = {}_{221} 9 & 345679 = {}_{34567} 9
\end{array}$$

และ

$$
\begin{array}{lllll}
0 = {}_{0}0 & -20 = {}_{-2}0 & -180 = {}_{-18}0 & -2210 = {}_{-221}0 & -345670 = {}_{-34567}0 \\
-1 = {}_{-1}9 & -21 = {}_{-3}9 & -181 = {}_{-19}9 & -2211 = {}_{-222}9 & -345671 = {}_{-34568}9 \\
-2 = {}_{-1}8 & -22 = {}_{-3}8 & -182 = {}_{-19}8 & -2212 = {}_{-222}8 & -345672 = {}_{-34568}8 \\
\vdots \;\; \vdots \;\; \vdots & \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots & \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots & \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots & \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots \\
-9 = {}_{-1}1 & -29 = {}_{-3}1 & -189 = {}_{-19}1 & -2219 = {}_{-222}1 & -345679 = {}_{-34568}1
\end{array}
$$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_{0}r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \le r < 10$

จากขั้นตอนวิธีการหาร จะพบว่าผลหารและเศษเหลือของจำนวนเต็มใดๆ ด้วยเลข 10 มีเพียงชุดเดียว ดังนั้นจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มใดๆ จึงมีแบบเดียว เช่น

$$754395486 = 10 \cdot 75439548 + 6 \text{ จะได้ว่า } 754395486 = {}_{75439548}6$$

$$\text{และ } -754395486 = 10 \cdot (-75439549) + 4 \text{ จะได้ว่า } -754395486 = {}_{-75439549}4$$

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ ${}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (1) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R} = \{ {}_{q}r \mid r, q \in \mathbf{Z} \text{ และ } 0 \le r < 10 \} \qquad (2)$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์จากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (1) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_{q}r$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $281_{71}96_{5}7_{28}690$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
281_{71}96_{5}7_{28}690 &= 28(1+71)9(6+5)(7+28)690 \\
&= 28(72)9(11)(35)690 \\
&= 28_{7}29_{1}1_{3}5690 \\
&= 2(8+7)2(9+1)(1+3)5690 \\
&= 2(15)2(10)45690 \\
&= 2_{1}52_{1}045690 \\
&= (2+1)5(2+1)045690 \\
&= 353045690
\end{aligned}
$$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้นบทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) (บน ${}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R}$ โดย

$${}_q r \;(\; {}_t s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a \quad ; & r+s \ge 10, r+s = {}_b a \end{cases}$$ สำหรับทุก ${}_q r, {}_t s \in {}_Z\mathrm{R}$

บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ $n \in \mathbf{N}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ แล้ว

$$-n \quad = \quad \begin{cases} {}_{-q}0 & ; \; r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; \; r \ne 0 \end{cases} \qquad (3)$$

จากการนิยามจำนวนเศษเหลือ ได้มีการประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือในการหาผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันถูกศึกษาในหลายลักษณะ ดังนี้ อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลขโดด 9 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปที่แน่นอนได้ ดังนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$({}_q r \, {}_q(r-1) \ldots {}_1 1_1 09 \ldots 321) \times 9 = \begin{cases} {}_q(r-1)\,\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_q(r-1)}\,9\,, \; 1 \le r < 10 \\ {}_{q-1}9\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{q-1}9}9 \qquad , \; r = 0 \end{cases}$$

อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไประหว่างจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบความสัมพันธ์ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots111}_{\#(1)={}_q r} = 9 \cdot \left[123 \ldots {}_q(r-3)\,{}_q(r-2)\,{}_q(r-1) \right] + {}_q r$$

ผลการศึกษาหลัก

เราพบว่าจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ในระบบเลขฐานสิบมีเพียงสี่จำนวน ได้แก่ $2, 42, 642$ และ 8642 และหากเรานำทั้งสี่จำนวนนี้ไปคูณกับเลขโดด 9 จะทำให้พบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ ดังนี้

$$\begin{array}{rcccrl} 2 & \times & 9 & = & 18 & : \#(7) = 0 \\ 42 & \times & 9 & = & 378 & : \#(7) = 1 \\ 642 & \times & 9 & = & 5778 & : \#(7) = 2 \\ 8642 & \times & 9 & = & 77778 & : \#(7) = 3 \end{array} \qquad (4)$$

จำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ใน (4) สามารถเขียนได้อยู่ในรูป $(2 \cdot n)\ldots642$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $1 \le n \le 4$ เราสังเกตเห็นว่า n มีผลต่อผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ โดยที่ผลคูณนี้เป็นจำนวนหลายหลัก ที่หลักหน่วยเป็นเลข

โดด 8 หลักที่มากที่สุดเป็นเลขโดด $(2\cdot n)-1$ ซึ่งเป็นเลขคี่ และหลักที่เหลือจำนวน $n-1$ หลักเป็นเลขโดด 7 ทั้งหมด ดังนี้

$$(2\cdot n)\ldots 642\times 9 \quad = \quad ((2\cdot n)-1)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=n-1}8$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $1\le n\le 4$ จึงทำให้เกิดข้อสงสัยดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ได้หรือไม่

(2) ถ้าเราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณนี้ได้ แล้วผลคูณนี้จะมีรูปทั่วไปสอดคล้องกับ (4) หรือไม่

จากตัวอย่าง $(2\cdot 15)0=(30)0={}_{3}00=300=20\cdot 15$ เราจึงได้บทตั้งต่อไปนี้ ซึ่งมีความสำคัญอย่างมากสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

บทตั้ง 2 $(2\cdot n)0=20\cdot n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

การพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}20\cdot n &= n\cdot 20\\ &= \underbrace{20+20+\ldots+20}_{n\text{ พจน์}}\\ &= (\underbrace{2+2+\ldots+2}_{n\text{ พจน์}})(\underbrace{0+0+\ldots+0}_{n\text{ พจน์}})\\ &= (n\cdot 2)0\\ &= (2\cdot n)0\end{aligned}$$

ดังนั้น $(2\cdot n)0=20\cdot n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n □

ต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทหลักของบทความนี้ ซึ่งจะตอบข้อสงสัยข้างต้นของเราได้

ทฤษฎีบท 3 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(2\cdot n)\ldots 642\times 9=((2\cdot n)-1)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=n-1}8$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$(2\cdot n)\ldots 642\times 9=((2\cdot n)-1)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=n-1}8 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

เนื่องจาก $(2\cdot 1)\times 9=18=((2\cdot 1)-1)\underbrace{77...7}_{\#(7)=1-1=0}8$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$(2\cdot k)\ldots 642\times 9=((2\cdot k)-1)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=k-1}8$$

ฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
[2\cdot(k+1)]\ldots 642\times 9 &= [2\cdot(k+1)](2\cdot k)\ldots 642\times 9\\
&= \{[2\cdot(k+1)]\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=k}+(2\cdot k)\ldots 642\}\times 9\\
&= \{[2\cdot(k+1)]\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=k}\times 9\}+\{(2\cdot k)\ldots 642\times 9\}\\
&= \{[2\cdot(k+1)]\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=k}\times 9\}+((2\cdot k)-1)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=k-1}8\\
&= \{[18\cdot(k+1)]\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=k}\}+((2\cdot k)-1)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=k-1}8\\
&= ((18\cdot k)+18+(2\cdot k)-1)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=k-1}8\\
&= ((20\cdot k)+17)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=k-1}8\\
&= (20\cdot k)\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=k}+17\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=k-1}8\\
&= (2\cdot k)0\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=k}+17\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=k-1}8 \qquad \text{(โดยบทตั้ง 2)}\\
&= ((2\cdot k)+1)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=k}8\\
&= [2\cdot(k+1)-1]\ \underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=(k+1)-1}\ 8
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$(2\cdot n)\ldots 642\times 9=((2\cdot n)-1)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=n-1}8 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

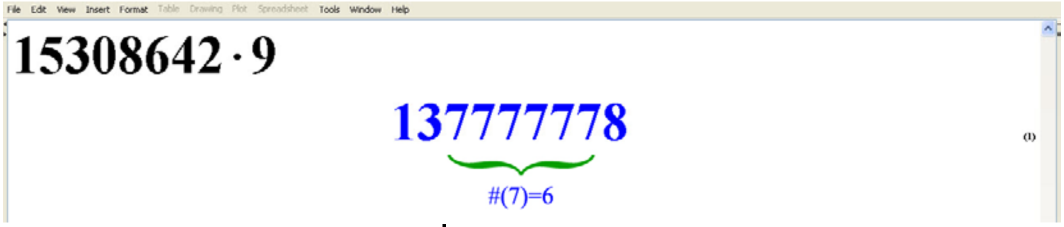
สามตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงการหาผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ถึง $14, 28$ และ 70 ตามลำดับ โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 3 ซึ่งเป็นการหาผลคูณที่ถูกต้องและรวดเร็ว

ตัวอย่าง 1 จงหาผลลัพธ์ของ 15308642×9

วิธีทำ เนื่องจาก $15308642={}_{1}4_{1}2_{1}08642=(14)(12)(10)8642=(2\cdot 7)(12)(10)8642$ และโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
15308642\times 9 &= (2\cdot 7)(12)(10)8642\times 9\\
&= (14-1)\ \underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=7-1=6}\ 8\\
&= (13)\underbrace{777777}_{\#(7)=6}8\\
&= 13\underbrace{777777}_{\#(7)=6}8
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบ



รูปที่ 1 : 15308642×9

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ 308641975308642×9

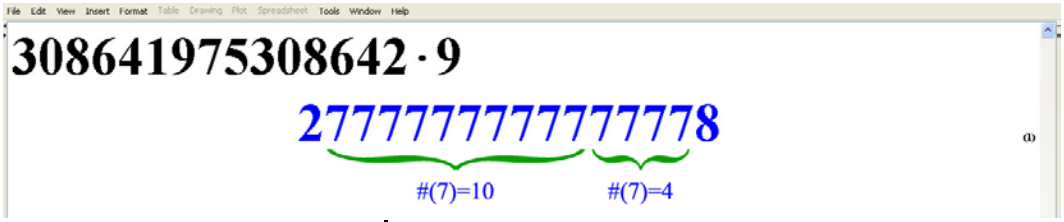
วิธีทำ เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
308641975308642 &= {}_{2}8_{2}6_{2}4_{2}2_{2}0_{1}8_{1}6_{1}4_{1}2_{1}08642 \\
&= (28)(26)(24)(22)(20)(18)(16)(14)(12)(10)8642 \\
&= (2\cdot 14)(26)(24)(22)(20)(18)(16)(14)(12)(10)8642
\end{aligned}
$$

และโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
308641975308642 \times 9 &= (2\cdot 14)(26)(24)(22)(20)(18)(16)(14)(12)(10)8642 \times 9 \\
&= (28-1)\ \underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=14-1=13}\ 8 \\
&= (27)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=13}8 \\
&= 2\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=14}8
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบ



รูปที่ 2 : 308641975308642×9

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ $77530864197530864197530864197530864 2 \times 9$

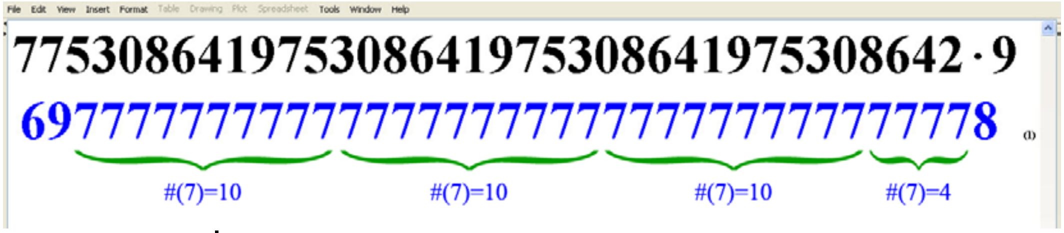
วิธีทำ เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
&775308641975308641975308641975308642 \\
&= {}_{7}0_{6}8_{6}6_{6}4\ldots{}_{1}6_{1}4_{1}2_{1}08642 \\
&= (70)(68)(66)(64)\ldots(16)(14)(12)(10)8642 \\
&= (2\cdot 35)(68)(66)(64)\ldots(16)(14)(12)(10)8642
\end{aligned}
$$

และโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&775308641975308641975308641975308642 \times 9 \\
&= (2\cdot 35)(68)(66)(64)\ldots(16)(14)(12)(10)8642 \\
&= (70-1)\ \underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=35-1=34}\ 8 \\
&= (69)\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=34}8 \\
&= 69\underbrace{77\ldots7}_{\#(7)=34}8
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบ



รูปที่ 3 : $775308641975308641975308641975308642\times 9$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ -241975308642×9

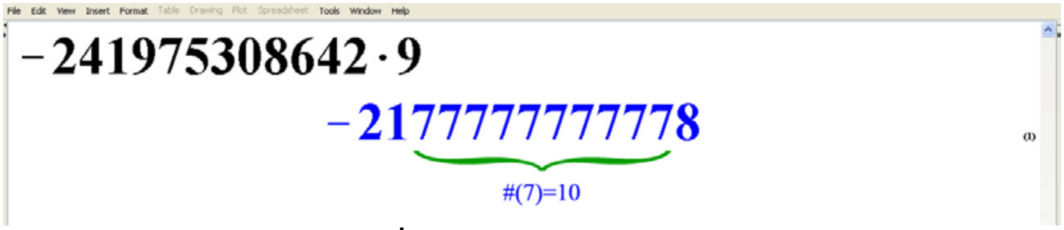
วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} -241975308642 &= -((22)(20)(18)(16)(14)(12)(10)8642) \\ &= -((2\cdot 11)(20)(18)(16)(14)(12)(10)8642) \end{aligned}$$

และโดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -241975308642\times 9 &= -((2\cdot 11)(20)(18)(16)(14)(12)(10)8642)\times 9 \\ &= -((2\cdot 11)(20)(18)(16)(14)(12)(10)8642\times 9) \\ &= -((22-1)\underbrace{77\ldots 7}_{\#(7)=11-1=10}8) \\ &= -((21)\underbrace{77\ldots 7}_{\#(7)=10}8) \\ &= -({}_{2}1\underbrace{77\ldots 7}_{\#(7)=10}8) \\ &= -21\underbrace{77\ldots 7}_{\#(7)=10}8 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ



รูปที่ 4 : -241975308642×9

บทสรุป

จากการศึกษาผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือที่เป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยสองข้อของเราได้ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ได้จริงตามทฤษฎีบท 3 ดังนี้

$$(2\cdot n)\ldots 642\times 9=((2\cdot n)-1)\underbrace{77\ldots 7}_{\#(7)=n-1}8 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก } n$$

(2) รูปทั่วไปที่ได้ตามทฤษฎีบท 3 นั้น สอดคล้องกับ (4) ที่เราพบ

จากการสังเกตผลคูณที่สวยงามของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่ จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ ซึ่งนับได้ว่ารูปทั่วไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไปของการสังเกตของเรา และกล่าวเช่นเดียวกับ (อัยเรศ, 2554) ได้ว่ารูปทั่วไปของผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่เป็นอีกความสวยงามวางนัยทั่วไปในแบบคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่ง ยิ่งไปกว่านั้นรูปทั่วไปนี้ยังช่วยให้การคำนวณหาผลคูณของเลขโดด 9 กับจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นไปทางซ้ายด้วยเลขคู่เป็นเรื่องที่สะดวกและไม่ยุ่งยากเกินไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ.วารสารนเรศวรพะเยา. 6(1). 25-30.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9. วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี. 15(1). 75-83.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารนเรศวรพะเยา. 4(2). 29-35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. วารสารวิทยาศาสตร์ มข. 41(4). 919-927.

Clark, W. E. (2002). Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida.

Received 28 August 2013
Accepted 14 January 2014