ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การคำนวณหาค่าของผลการยกกำลังใด ๆ ของจำนวนสองหลัก

Generalized beauty : The calculation of the powers of double digits.

ณัฏฐปิญชาน์ พิชญาชมชื่น[1*] และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์[2]

Natthapincha Phitchayachomchuen[1*] and Aiyared Iampan[2]

ABSTRACT

The remainder is used to find a general form of the powers of double digits for easier of calculation and to show the beauty in the proof and general form. Suggestions to extend this technique are given.

Keywords : general form, the calculations of the power, double digits.

บทคัดย่อ

บทความฉบับนี้ได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเพื่อศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังใดๆ ของจำนวนสองหลัก สำหรับใช้เป็นเครื่องมือเพื่อเพิ่มความสะดวกในการคำนวณและแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของการพิสูจน์และหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังนี้ด้วย ซึ่งรูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังที่ได้จากการพิสูจน์จะขึ้นอยู่กับการยกกำลังใดๆ ของจำนวนสองหลัก พร้อมทั้งเสนอแนวทางการขยายการศึกษาของบทความนี้ด้วย

คำสำคัญ : ความสวยงามวางนัยทั่วไป ผลการยกกำลังใดๆ จำนวนสองหลัก

[1*]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนนครสวรรค์ จ.นครสวรรค์ 60000

Department of Mathematics, Nakhon Sawan School, Nakhon Sawan 60000, Thailand.

[2]สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา จ.พะเยา 56000

Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Phayao 56000, Thailand.

[*]Corresponding author: E-mail address: teerayut_20042533@hotmail.com

คำนำ

หากเราจะคำนวณหาค่าคำตอบของผลการยกกำลังใดๆ ของจำนวนสองหลักนั้นถึงแม้ว่าจะไม่ใช่เรื่องที่ยากเกินไปแต่ก็คงไม่สะดวกนักถ้าเราไม่มีเครื่องคิดเลข คอมพิวเตอร์ หรือสูตรลัดบางอย่างเป็นเครื่องมือช่วยสำหรับการคำนวณหาผลของการยกกำลังนี้ ยิ่งถ้าจำนวนสองหลักที่มีการยกกำลังมาก เครื่องคิดเลขบางเครื่องก็อาจจะคำนวณค่าไม่ได้ ฉะนั้นหากเราสามารถหาสูตรสำหรับการคำนวณหาผลของการยกกำลังใดๆ ของจำนวนสองหลักได้ก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นสำหรับการคำนวณ การศึกษาและการหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังใดๆ ของจำนวนสองหลักได้แนวความคิดมาจากบทความเรื่อง ความสวยงามวางนัยทั่วไป : การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 (อัยเรศ, 2554) ที่ได้แสดงถึงการศึกษาและการหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ ซึ่งนับได้ว่าเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นสำหรับการคำนวณหาผลการยกกำลังสองนี้ หากเราศึกษาการพิสูจน์อย่างละเอียดจนกระทั่งเข้าใจทฤษฎีบท จะเห็นได้ว่านั่นคือความสวยงามของคณิตศาสตร์ในอีกรูปแบบหนึ่งด้วย

ดังนั้นบทความฉบับนี้นี้จึงมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาและหารูปแบบทั่วไปในการคำนวณหาค่าของผลการยกกำลังใด ๆ ของจำนวนสองหลัก โดยอาศัยจำนวนที่ถูกนิยามใน (I) ที่กล่าวว่าสำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และจำนวนเต็ม r ที่ซึ่ง $a=10q+r$ โดยที่ $0 \le r < 10$ ซึ่งกรณีดังกล่าวจะเขียนแทนด้วย $a := {}_q r$ (อัยเรศ (2554) และณัฐวุฒิ และ อัยเรศ (2555)) เป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการสร้างเลขโดด ซึ่งหากรูปแบบทั่วไปของผลคูณนี้หาได้จริงก็จะเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นในการคำนวณหาผลคูณนั่นเอง ยิ่งไปกว่านั้น การพิสูจน์และทฤษฎีบทที่ได้รับก็จะเป็นการแสดงถึงความสวยงามของคณิตศาสตร์ในอีกรูปแบบหนึ่งเช่นกัน

เอกสารที่เกี่ยวข้องและวิธีการดำเนินการศึกษา

หัวข้อนี้จะแสดงถึงการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องและวิธีการดำเนินการ ในการเขียนบทความฉบับนี้ โดยศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับบทความ รวมถึงศึกษาข้อสังเกตและข้อเท็จจริงตามวัตถุประสงค์และสมมติฐานของบทความ ดังนี้

ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n, r เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ จะได้ว่า $(x+y)^n$ มีสูตรดังนี้

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \text{ โดยที่ } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ตัวอย่างผลที่ได้จากทฤษฎีบททวินามในกรณีที่ n $\le$ 5 เช่น

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

ทฤษฎีบท อัยเรศ (2554) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$(1_{[n]})^2 = 1_{[n]} \times 1_{[n]} = 123\ldots 9_1 0_1 1\ldots {}_q(r-1)_q(r)_q(r-1)\ldots {}_1 1_1 09\ldots 321$$

ตัวอย่างผลที่ได้จากทฤษฎี (อัยเรศ, 2554) ในกรณีที่ n ≤ 10 เช่น

$$(1)^2 = 1\times 1 = 1$$
$$(11)^2 = 11\times 11 = 121$$
$$(111)^2 = 111\times 111 = 12321$$
$$\vdots$$
$$(1_{[9]})^2 = 1_{[9]} \times 1_{[9]} = 12345678987654321$$
$$(1_{[10]})^2 = 1_{[10]} \times 1_{[10]} = 1234567900987654321$$

ทฤษฎีบท ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ (2555) ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ (2555) ได้นิยามเซตของจำนวนใน (I) ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1 ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ (2555) กำหนดให้ ${}_{\mathsf{Z}}\mathsf{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (I) ทั้งหมด นั่นคือ ${}_{\mathsf{Z}}\mathsf{R} = \{{}_q r \mid q \in \mathbf{Z}$ และ $0 \le r < 10\}$ และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathsf{Z}}\mathsf{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้ โดยดูการประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเพิ่มเติมได้จาก อัยเรศ (2554) และ ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ (2555)

สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และจำนวนเต็ม r ที่ซึ่ง $a = 10q + r$ โดยที่ $0 \le r < 10$ ซึ่งกรณีดังกล่าวจะเขียนแทนด้วย $a := {}_q r$ (อัยเรศ (2554) และ ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ (2555)) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

(I)

เช่น

$0 = {}_0 0$	$10 = {}_1 0$	$20 = {}_2 0$	$100 = {}_{10} 0$	$250 = {}_{25} 0$
$1 = {}_0 1$	$11 = {}_1 1$	$21 = {}_2 1$	$101 = {}_{10} 1$	$251 = {}_{25} 1$
$2 = {}_0 2$	$12 = {}_1 2$	$22 = {}_2 2$	$102 = {}_{10} 2$	$252 = {}_{25} 2$
$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$
$9 = {}_0 9$	$19 = {}_1 9$	$29 = {}_2 9$	$109 = {}_{10} 9$	$259 = {}_{25} 9$

และ

$-0 = {}_{-0} 0$	$-10 = {}_{-1} 0$	$-20 = {}_{-2} 0$	$-100 = {}_{-10} 0$	$-250 = {}_{-25} 0$
$-1 = {}_{-1} 9$	$-11 = {}_{-2} 9$	$-21 = {}_{-3} 9$	$-101 = {}_{-11} 9$	$-251 = {}_{-26} 9$
$-2 = {}_{-1} 8$	$-12 = {}_{-2} 8$	$-22 = {}_{-3} 8$	$-102 = {}_{-11} 8$	$-252 = {}_{-26} 8$
$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$
$-9 = {}_{-1} 1$	$-19 = {}_{-2} 1$	$-29 = {}_{-3} 1$	$-109 = {}_{-11} 1$	$-259 = {}_{-26} 1$

เพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้นในกรณีที่เป็นจำนวน (-) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $a = 10q + r$ ได้จาก

ตัวอย่างข้างต้นดังนี้ เช่น $-9=10(-1)+1={}_{-1}1$ และ $-19=10(-2)+1={}_{-2}1$ เป็นต้น

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทหลักในหัวข้อต่อไป และนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์จากทฤษฎีบทได้ง่ายขึ้น จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย เพื่อความสะดวก เราเขียนจำนวนเศษเหลือ ${}_0r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0\le r<10$ และเพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (I) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ ซึ่งทำได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย และสำหรับจำนวนในหลักหน่วยให้ดึงเศษลงมาได้เลย เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายจะขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $358_{14}7_{1}4_{25}669$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบดังนี้

$$
\begin{aligned}
358_{14}7_{1}4_{25}669 &= 35(8+14)(7+1)(4+25)669\\
&= 35_{2}28_{2}9669\\
&= 3(5+2)2(8+2)9669\\
&= 372_{1}09669\\
&= 37(2+1)09669\\
&= 37309669
\end{aligned}
$$

ผลการศึกษา

หัวข้อนี้จะแสดงถึงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วยข้อสังเกตที่เราพบความสัมพันธ์ของผลการยกกำลังสองของเลขสองหลักในรูปแบบใหม่ จนนำเราไปสู่การศึกษาการคำนวณหาผลการยกกำลังใดๆ ของเลขสองหลักในรูปแบบใหม่ อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ในผลการดำเนินการ ดังนี้

จากการสังเกตการยกกำลังสองของจำนวนที่บวกกันสองจำนวนโดยใช้กำลังสองสมบูรณ์ เช่น $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ คณะผู้จัดทำจึงเกิดข้อสงสัยว่า

1. ถ้าเป็นจำนวนสองหลักที่ยกกำลังสองสามารถหาคำตอบโดยใช้วิธีคล้ายกับวิธีการหาผลบวกที่ใช้กำลังสองสมบูรณ์ และสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนในการคำนวณหาค่าของผลการยกกำลังสองของจำนวนสองหลักได้ได้หรือไม่

คณะผู้จัดได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องในบทที่สองทำให้สามารถพบความสัมพันธ์บางอย่างของการยกกำลังสอง ของจำนวนสองหลัก ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 1</u>

II

$$
\begin{aligned}
(15)^2 &= (1^2)(2\bullet 1\bullet 5)(5^2)\\
&= (1)(10)(25)\\
&= 1_{1}0_{2}5\\
&= (1+1)(0+2)5\\
&= 225
\end{aligned}
$$

ŧV

III

$$
\begin{aligned}
(23)^2 &= (2^2)(2\bullet 2\bullet 3)(3^2)\\
&= (4)(12)(9)\\
&= 4_{1}29\\
&= (4+1)29\\
&= 529
\end{aligned}
$$

V

$$
\begin{aligned}
(67)^2 &= (6^2)(2\bullet6\bullet7)(7^2) \\
&= (36)(84)(49) \\
&= {}_{3}6_{8}4_{4}9 \\
&= (0+3)(6+8)(4+4)9 \\
&= 3_{1}489 \\
&= (3+1)489 \\
&= 4489
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(99)^2 &= (9^2)(2\bullet9\bullet9)(9^2) \\
&= (81)(162)(81) \\
&= {}_{8}1_{16}2_{8}1 \\
&= (0+8)(1+16)(2+8)1 \\
&= 8_{1}7_{1}01 \\
&= (8+1)(7+1)01 \\
&= 9801
\end{aligned}
$$

จาก (II), (III), (IV) และ (V) พบว่าถ้านำจำนวนสองหลักมายกกำลังสองดังตัวอย่าง ไม่จำเป็นต้องตั้งคูณกันแต่เราสามารถหาคำตอบโดยใช้วิธีเดียวกับกำลังสองสมบูรณ์ โดยกำหนดให้ xy เป็นจำนวนสองหลัก โดยที่ x แทนเลขโดดในหลักสิบ และ y แทนเลขหลักหน่วย ถ้านำจำนวนสองหลักมายกกำลังสองสามารถคำนวณได้ดังนี้คือ $(xy)^2 = x^2(2\bullet x\bullet y)y^2$ โดยที่ถ้าผลการคูณหรือผลการยกกำลังของจำนวนหลักใดเกินสิบเราจะคำนวณหาคำตอบโดยอาศัยจำนวนที่ถูกนิยามใน (I) มาช่วยคำนวณในการหาคำตอบ

ตัวอย่างข้างต้นที่ได้ศึกษาได้แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของการยกกำลังสองของเลขสองหลักโดยมีลักษณะคล้ายกำลังสองสมบูรณ์ ผู้ศึกษาจึงเกิดข้อสงสัยต่อไปว่า

2. เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนในการคำนวณหาค่าของผลการยกกำลังใดๆ ของจำนวนสองหลักที่มีเลขชี้กำลังมากกว่าสอง ได้หรือไม่

3. รูปแบบทั่วไปที่แน่นอน นั้นมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่เราพบหรือไม่

ดังนั้นบทความนี้ผู้เขียนจึงหารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของการยกกำลังใด ๆ ของจำนวนสองหลัก

ซึ่งถ้าเราจะกล่าวเช่นเดียวกับ (อัยเรศ, 2011) ว่ารูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลการยกกำลังใดๆ ที่ได้มานั้นเป็น ***ความสวยงามวางนัยทั่วไป*** (Generalized Beauty) ในแบบคณิตศาสตร์อีกหนึ่งรูปแบบก็คงจะไม่ผิดนัก

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้นบทตั้ง 5 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2555) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย มากกว่านั้นยังได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน ${}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R}$ โดย

$$
{}_{q}r \boxplus {}_{t}s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s) & ; 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a & ; r+s \ge 10, r+s = {}_{b}a \end{cases}
$$

สำหรับทุก ${}_{q}r, {}_{t}s \in {}_{\mathrm{Z}}\mathrm{R}$

บทตั้ง 1 กำหนดให้ xy แทนจำนวนสองหลัก โดยที่ x แทนเลขโดดในหลักสิบ y แทนเลขหลักหน่วย และ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า
จะได้ว่า $xy = x0 \boxplus y$

การพิสูจน์

$$xy = 10x + 0y = {}_x0 + {}_0y = {}_x(0 \boxplus 0)y = x0 \boxplus y$$

□

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนดให้ xy แทนจำนวนสองหลัก โดยที่ x แทนเลขโดดในหลักสิบ y แทนเลขหลักหน่วย n แทนเลขชี้กำลัง และ x, y และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(xy)^n = x^n\left[\binom{n}{n-1}\bullet x^{n-1}\bullet y\right]\left[\binom{n}{n-2}\bullet x^{n-2}\bullet y^2\right]\ldots\left[\binom{n}{1}\bullet x\bullet y^{n-1}\right]y^n$$

การพิสูจน์

$$\begin{aligned}
(xy)^n &= (x0 \boxplus y)^n \\
&= (x0)^n \boxplus \left[\binom{n}{n-1}\bullet (x0)^{n-1}\bullet y^1\right] \boxplus \left[\binom{n}{n-2}\bullet (x0)^{n-2}\bullet y^2\right] \boxplus \\
&\quad \ldots \boxplus \left[\binom{n}{1}\bullet (x0)^1\bullet y^{n-1}\right] \boxplus y^n \\
&= (x)^n \underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=n} \boxplus \left[\binom{n}{n-1}\bullet (x)^{n-1}\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=n-1}\bullet y^1\right] \boxplus \left[\binom{n}{n-2}\bullet (x)^{n-2}\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=n-2}\bullet y^2\right] \boxplus \\
&\quad \ldots \boxplus \left[\binom{n}{1}\bullet (x)^1\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=1}\bullet y^{n-1}\right] \boxplus y^n \\
&= (x)^n \underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=n} \boxplus \left[\binom{n}{n-1}\bullet (x)^{n-1}\bullet y\right]\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=n-1} \boxplus \left[\binom{n}{n-2}\bullet (x)^{n-2}\bullet y^2\right]\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=n-2} \boxplus \\
&\quad \ldots \boxplus \left[\binom{n}{1}\bullet (x)^1\bullet y^{n-1}\right]\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=1} \boxplus y^n \\
&= x^n\left[\binom{n}{n-1}\bullet x^{n-1}\bullet y^1\right]\left[\binom{n}{n-2}\bullet x^{n-2}\bullet y^2\right]\ldots\left[\binom{n}{1}\bullet x^1\bullet y^{n-1}\right]y^n
\end{aligned}$$

□

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\#(0) = n$ หมายถึง มี 0 จำนวน n ตัว

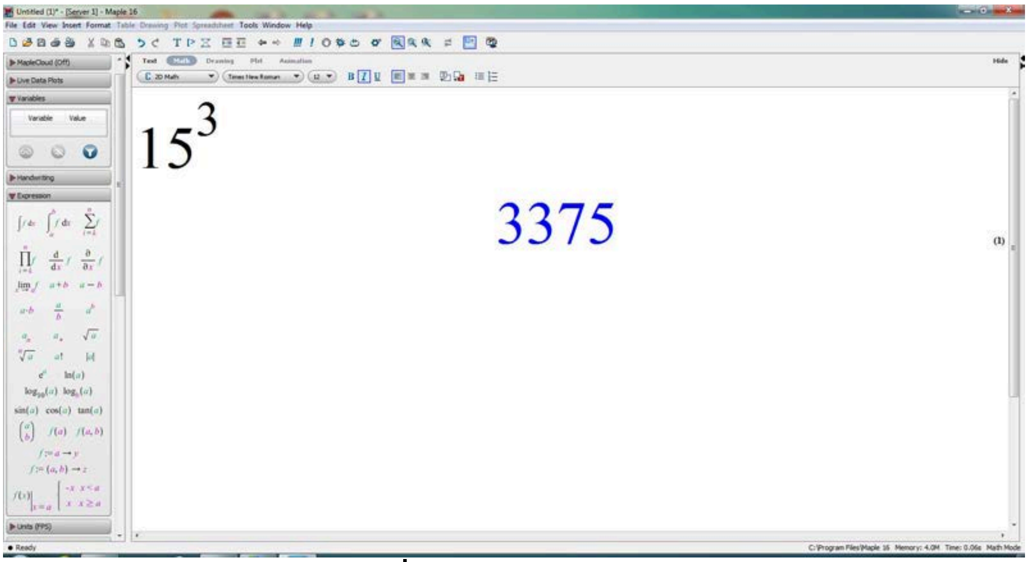
ต่อไปเราจะให้ตัวอย่างของการยกกำลังใด ๆ ของจำนวนสองหลัก โดยใช้ผลจากทฤษฎีบท 1 พร้อมทั้งตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $(15)^3 = 3375$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(15)^3 &= 1^3\left[\binom{3}{2}(1^2)(5)\right]\left[\binom{3}{1}(1)(5^2)\right]5^3 \\
&= 1\left[\left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right)\bullet 1\bullet 5\right]\left[\left(\frac{3!}{1!(3-1)!}\right)1\bullet 25\right](125) \\
&= 1[3\bullet 1\bullet 5][3\bullet 1\bullet 25](125) \\
&= 1(15)(75)(125) \\
&= 1_1 5_7 5_{12} 5 \\
&= (1+1)(5+7)(5+12)5 \\
&= 2(12)(17)5 \\
&= 2_1 2_1 75 \\
&= (2+1)(2+1)75 \\
&= 3375
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



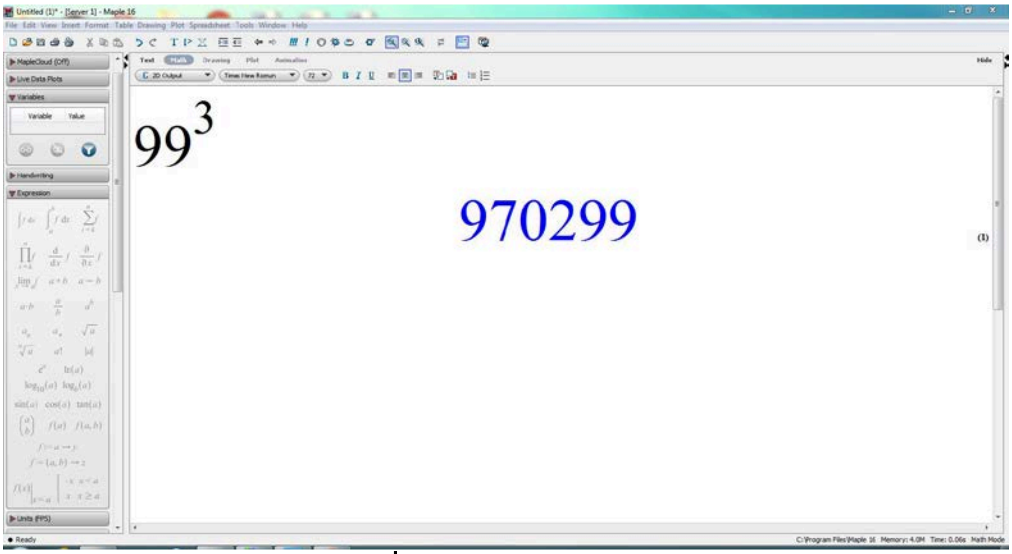
รูปที่ 1: ผลการยกกำลัง 15^3

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $(99)^3 = 970299$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(99)^3 &= 9^3\left[\binom{3}{2}(9^2)(9)\right]\left[\binom{3}{1}(9)(9^2)\right]9^3 \\
&= (729)\left[\left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right)\bullet 81\bullet 9\right]\left[\left(\frac{3!}{1!(3-1)!}\right)\bullet 9\bullet 81\right](729) \\
&= (729)[3\bullet 81\bullet 9][3\bullet 9\bullet 81](729) \\
&= (729)(2187)(2187)(729) \\
&= {}_{72}9\,{}_{218}7\,{}_{218}7\,{}_{72}9 \\
&= (0+72)(9+218)(7+218)(7+72)9 \\
&= (72)(227)(225)(79)9 \\
&= {}_{7}2\,{}_{22}7\,{}_{22}5\,{}_{7}99 \\
&= (0+7)(2+22)(7+22)(5+7)99 \\
&= 7(24)(29)(12)99 \\
&= 7\,{}_{2}4\,{}_{2}9\,{}_{1}299 \\
&= (7+2)(4+2)(9+1)299 \\
&= 96(10)299 \\
&= 96\,{}_{1}0299 \\
&= 9(6+1)0299 \\
&= 970299
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



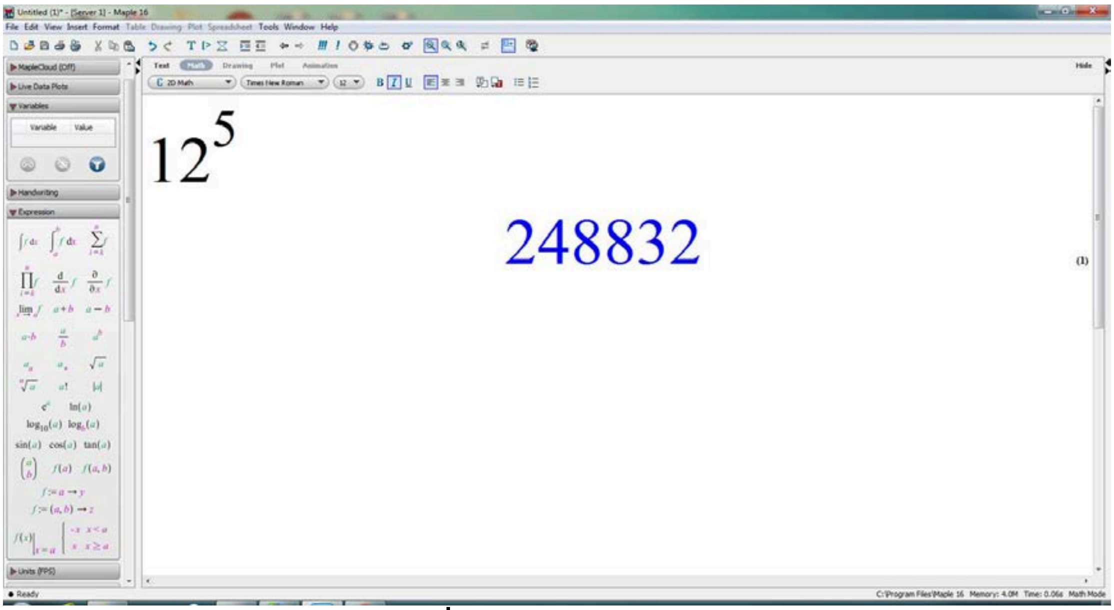
รูปที่ 2: ผลการยกกำลัง 99^3

ตัวอย่าง 4 จงหาค่าของ $(12)^5 = 248832$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(12)^5 &= 1^5\left[\binom{5}{4}(1^4)(2)\right]\left[\binom{5}{3}(1^3)(2^2)\right]\left[\binom{5}{2}(1^2)(2^3)\right]\left[\binom{5}{1}(1)(2^4)\right]2^5 \\
&= 1\left[\left(\frac{5!}{4!(5-4)!}\right)\bullet 1\bullet 2\right]\left[\left(\frac{5!}{3!(5-3)!}\right)\bullet 1\bullet 4\right]\left[\left(\frac{5!}{2!(5-2)!}\right)\bullet 1\bullet 8\right]\left[\left(\frac{5!}{1!(5-1)!}\right)\bullet 1\bullet 16\right](32) \\
&= 1[5\bullet 1\bullet 2][10\bullet 1\bullet 4][10\bullet 1\bullet 8][5\bullet 1\bullet 16](32) \\
&= 1(10)(40)(80)(80)(32) \\
&= 1_1 0_4 0_8 0_8 0_3 2 \\
&= (1+1)(0+4)(0+8)(0+8)(0+3)2 \\
&= 248832
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 3: ผลการยกกำลัง 12^5

สรุป และอภิปรายผล

การคำนวณหาค่าของผลการยกกำลังใด ๆ ของจำนวนสองหลักสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้ตามทฤษฎีบท 1 นั้นสอดคล้องกับตัวอย่าง 1 ที่เราสังเกตเห็นตั้งแต่แรก ใน (II), (III) ,(IV) และ (V) และเรายังสามารถหาคำตอบของผลการยกกำลังใด ๆ ของจำนวนสองหลักดังตัวอย่างที่ 2,3 และ 4 ได้ ซึ่งสอดคล้องตามทฤษฎีบท 1 ทั้งสิ้น ดังนั้นการคำนวณหาค่าของผลการยกกำลังใด ๆ ของจำนวนสองหลัก ทำให้เราสามารถตอบข้อสงสัยทั้งสองข้อข้างต้นของเราได้ ดังนี้

1. เราสามารถหาค่าของจำนวนสองหลักที่ยกกำลังสองโดยใช้วิธีคล้ายกับวิธีการหาผลบวกโดยใช้กำลังสองสมบูรณ์ได้ และสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนในการคำนวณหาค่าของผลการยกกำลังสองของจำนวนสองหลักได้ ตามทฤษฎีบท 1

2. เราสามารถเขียนรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลการยกกำลังใด ๆ ของจำนวนสองหลักที่มีเลขชี้กำลังมากกว่าสอง ได้ตามทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ x แทนเลขโดดในหลักสิบ y แทนเลขหลักหน่วย และ n แทนเลขชี้กำลัง โดยที่ x, y และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ดังนี้

$$(xy)^n = x^n\left[\binom{n}{n-1}\bullet x^{n-1}\bullet y\right]\left[\binom{n}{n-2}\bullet x^{n-2}\bullet y^2\right]\ldots\left[\binom{n}{1}\bullet x^1\bullet y^{n-1}\right]y^n$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

3. รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนตามทฤษฎีบท 1 นั้นมีลักษณะเหมือนกับข้อสังเกตที่เราพบดังนั้น รูปแบบที่ทั่วไปที่แน่นอนของผลการยกกำลังใดๆ ของจำนวนสองหลัก

ข้อเสนอแนะ

จากผลการศึกษาบทความฉบับนี้และบทความอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ผู้อ่านจะสังเกตเห็นว่าจำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่างๆ ของจำนวนเต็ม ฉะนั้นผู้อ่านสามารถที่จะเริ่มขยายผลการศึกษาของบทความนี้ โดยศึกษาและหารูปแบบทั่วไปของผลการยกกำลังใดๆ ของจำนวนที่มากกว่าสองหลักก่อนได้โดยอาศัยจำนวนที่ถูกนิยามใน (I) และแนวทางการพิสูจน์จากรายงานฉบับนี้นี้ เช่นจากข้อสังเกตยกกำลังสอง ของจำนวนสามหลัก เราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ ดังนี้

$$\begin{aligned}
(123)^2 &= (12)^2(2\bullet 12\bullet 3)3^2 \\
&= \left[1^2(1\bullet 1\bullet 2)2^2\right](2\bullet 12\bullet 3)3^2 \\
&= (144)(72)9 \\
&= {}_{14}4_{7}29 \\
&= (0+14)(4+7)29 \\
&= (14)(11)29 \\
&= {}_{1}4_{1}129 \\
&= (0+1)(4+1)129 \\
&= 15129
\end{aligned}$$

จากข้อสังเกตข้างต้นและการศึกษาในทำนองเดียวกับบทความนี้ ผู้เขียนคาดว่าน่าจะได้รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนและยังคงความสวยงามของการพิสูจน์และทฤษฎีบทที่จะได้รับเช่นกัน ยิ่งไปกว่านั้น ยังเป็นการเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้นในการคำนวณหาค่าของผลการยกกำลังใดๆ ของจำนวนที่มากกว่าสองหลัก อีกด้วย

คำขอบคุณ

บทความฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดี เนื่องจากได้รับความเมตตาและความกรุณาอย่างสูงจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ อาจารย์ที่ปรึกษาที่ได้ให้แนวคิด ให้คำปรึกษา คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องในการทำโครงงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุดในปัจจุบัน ข้าพเจ้ารู้สึกซาบซึ้งในความเอาใจใส่ดูแลเป็นอย่างดียิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้ และขอกราบขอบพระคุณบิดา คุณมารดา และญาติมิตร รวมทั้งเพื่อนทุกคนที่คอยให้กำลังใจ และให้ความช่วยเหลือเกื้อกูลกันมาโดยตลอดจนทำบทความฉบับนี้สำเร็จสมบูรณ์

เอกสารอ้างอิง

ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2555. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ, วารสารนเรศวรพะเยา ปีที่ 6 ฉบับที่ 1, น. 25-30.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1, วารสารนเรศวรพะเยาปีที่ 4 ฉบับที่ 2, น. 29-35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป : จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. วารสารวิทยาศาสตร์ มข ปีที่ 41 ฉบับที่ 4, น. 919-927.

Clark, W. E. 2002. Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida. USA.

Received 25 August 2018

Accepted 30 April 2018